

第七章 Brown 运动: 金融随机分析的基石

- 1 从花粉运动到股价波动: 为什么金融要学 Brown 运动?
 - 什么是 Brown 运动?
 - 核心性质(独立增量, 正态性, 路径连续)
 - 反射原理与首达时间
 - 金融应用: 股价建模与期权定价
- 2 轨道性质: 极其粗糙的路径
 - 二次变差
- 3 Brown 运动与鞅
 - 连续鞅
 - 指数鞅与 Doob 停止定理
 - 案例: 赌徒破产问题



今天我们要讲的 Brown 运动, 其实是个“跨界明星”.

- ◇ 1827 年, 英国植物学家布朗发现花粉颗粒在水里乱跳, 不知道为什么;
- ◇ 1900 年, L. Bachelier 的博士论文 *Théorie de la spéculation* (投机理论), 是公认的金融数学与随机过程在金融中应用的开山之作, 比爱因斯坦的布朗运动物理解释还要早 5 年;
- ◇ 1905 年, 爱因斯坦用统计物理解释了这个现象;
- ◇ 1923 年, 数学家 Wiener 证明了这个过程在数学上是存在的;
- ◇ 1973 年, Black & Scholes 把它用到了期权定价里, 直接拿了诺贝尔奖.

一个物理现象, 最后成了金融工程的核心工具. 它到底有什么魔力?



为什么股价要用 Brown 运动建模?——从直观到定义

股价的两个核心特征, 是我们选择 Brown 运动的根本原因:

1. **(连续波动)** 理想情况下, 股价不会发生瞬间跳变, 价格随时间的变化是连续的, 就像一条没有断点的曲线.
2. **(处处不可导)** 股价没有“确定的瞬时变化率”, 你永远找不到一条直线, 能和股价曲线在某一点“相切”. 它的未来走向是完全随机的, 不存在稳定的趋势.

Brown 运动, 是第一个在数学上严格刻画了连续但处处不可导的随机轨道的模型.



为什么股价要用 Brown 运动建模?——从直观到定义

股价的两个核心特征, 是我们选择 Brown 运动的根本原因:

1. **(连续波动)** 理想情况下, 股价不会发生瞬间跳变, 价格随时间的变化是连续的, 就像一条没有断点的曲线.
2. **(处处不可导)** 股价没有“确定的瞬时变化率”, 你永远找不到一条直线, 能和股价曲线在某一点“相切”. 它的未来走向是完全随机的, 不存在稳定的趋势.

Brown 运动, 是第一个在数学上严格刻画了**连续但处处不可导**的随机轨道的模型.



从花粉运动到股价波动: 为什么金融要学 Brown 运动?

轨道性质: 极其粗糙的路径

Brown 运动与鞅

什么是 Brown 运动?

核心性质(独立增量, 正态性, 路径连续)

反射原理与首达时间

金融应用: 股价建模与期权定价

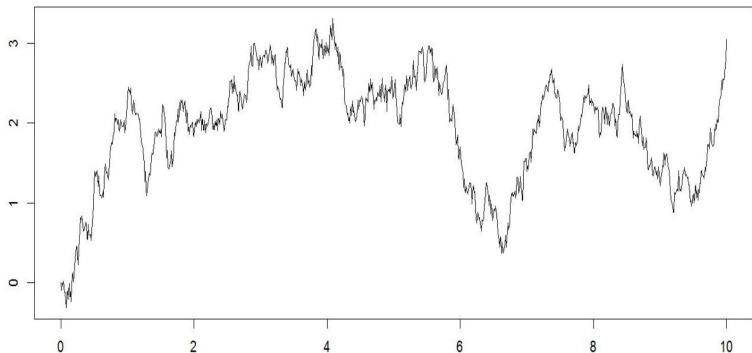


图 7-1 Brown 运动的样本轨道



Brown 运动的样本路径看似平滑, 实则处处不可导. 这一特性完美对应了股价的行为:

价格是连续变化的, 但不存在稳定的 “瞬时收益率” .

也是因为这一点, 我们不能用普通微积分来处理股价模型, 必须引入随机微积分这一全新工具.

本章目标:

- ◇ 先了解 Brown 运动的基本定义与性质, 建立从离散随机游走到连续随机分析的桥梁;
- ◇ 之后掌握布朗运动的核心性质与伊藤微积分, 最终理解 Black-Scholes 模型的底层逻辑.



Brown 运动的样本路径看似平滑, 实则处处不可导. 这一特性完美对应了股价的行为:

价格是连续变化的, 但不存在稳定的“瞬时收益率”.

也是因为这一点, 我们不能用普通微积分来处理股价模型, 必须引入随机微积分这一全新工具.

本章目标:

- ◇ 先了解 Brown 运动的基本定义与性质, 建立从离散随机游走到连续随机分析的桥梁;
- ◇ 之后掌握布朗运动的核心性质与伊藤微积分, 最终理解 Black-Scholes 模型的底层逻辑.



定义 7.1.1:

若随机过程 $\{B(t), t \geq 0\}$ 满足

(1) **独立质量**: $B(t)$ 是独立增量过程;

(金融含义: 未来价格变化与历史无关, 对应弱式有效市场假设)

(2) **正态分布增量**: 对任意 $s, t > 0$, $B(s+t) - B(s) \sim N(0, t)$;

(金融含义: 波动大小与时间的平方根成正比, 是波动率建模的核心)

(3) **路径连续**: $t \mapsto B(t)$ (几乎处处) 是连续函数.

(金融含义: 价格不会跳变, 对应无交易成本的连续市场假设)

则称 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为 **Brown 运动** 或 **Wiener 过程**.

特别的, 当 $B(0) = 0$ 时, 称 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为 **标准 Brown 运动**,
(若无特殊说明, 下面基本都考虑的是标准 Brown 运动.)



金融视角的解读

- ◇ 想象一个醉汉在数轴上乱走(Random Walk): 每一步独立、方向随机, 这是股价波动的离散原型;
- ◇ 在金融中, Brown 运动是白噪声(随机扰动)的积分, 是描述股价连续随机波动的最基础的工具;
- ◇ 它完美刻画了股价的核心特征: 波动随机、路径连续、却处处不可导, 是期权定价、风险管理的数学基石。



利用 Brown 运动的独立增量性与正态性计算. 这些计算是理解股价波动相关性、条件分布的基础.

例 7.1.1 假设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 是一维 Brown 运动, 求:

- (1) $B(1) + 3B(2)$ 的分布;
- (2) $\text{Cov}(B(1) + B(3), B(3) - B(2))$;
- (3) $\mathbb{P}(B(6) \leq 3 | B(1) = 1, B(3) = 2)$.



为什么 Brown 运动很重要?

- ◇ 无后效性(Markov 性): 未来的价格变化只依赖当前价格, 和历史路径无关.
- ◇ 鞅性: $\mathbb{E}[B(t)|\mathcal{F}_s] = B(s)$. 这是公平市场、无套利定价的数学描述.
- ◇ 自相似性 (Self-similarity):

$$\{cB(t/c^2)\} \stackrel{d}{=} \{B(t)\}$$

放大或缩小时间尺度, 它看起来还是一样“粗糙”.

(金融含义: 无论看日线、小时线还是分钟线, 股价波动的“粗糙程度”都一样, 对应波动率的时间尺度不变性)

- ◇ 时间反转: $\tilde{B}(t) = tB(1/t)$ 也是 Brown 运动, 说明过去和未来的波动规律是对称的.



有限维分布

定理 7.2.3

对任意 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $(B(t_1), \cdots, B(t_n))$ 的联合密度为

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_{t_i - t_{i-1}}(x_i - x_{i-1}).$$

其中 $p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$, $x_0 = 0$.

这个公式的本质, 是把股价的路径分解成了独立增量:

每一段的价格变化都服从正态分布, 且相互独立.



证*. (对 n 用数学归纳法) 当 $n = 2$ 时, 由 Markov 性和平稳性,

$$\mathbb{P}(B(t_2) \leq x_2 | B(t_1) = x_1) = \mathbb{P}(B(t_2) - B(t_1) \leq x_2 - x_1),$$

给定 $B(t_1) = x_1$, $B(t_2)$ 的条件密度

$$f_{t_2}(x_2 | X(t_1) = x_1) = p_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1).$$

所以由条件密度的性质,

$$\begin{aligned} f_{t_1, t_2}(x_1, x_2) &= f_{t_2}(x_2 | X(t_1) = x_1) p_{t_1}(x_1) \\ &= p_{t_1}(x_1) p_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1). \end{aligned}$$



设 $n = k$ 时原式成立, 同理

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(B(t_{k+1}) \leq x_{k+1} | B(t_k) = x_k, B(t_j) = x_j, 1 \leq j \leq k-1) \\ &= \mathbb{P}(B(t_{k+1}) - B(t_k) \leq x_{k+1} - x_k | B(t_k) = x_k) \\ &= \mathbb{P}(B(t_{k+1}) - B(t_k) \leq x_{k+1} - x_k). \end{aligned}$$

$$\therefore f_{t_{k+1}}(x_{k+1} | B(t_j) = x_j, 1 \leq j \leq k-1) = p_{t_{k+1}-t_k}(x_{k+1} - x_k).$$

从而

$$\begin{aligned} & f_{t_1, \dots, t_{k+1}}(x_1, \dots, x_{k+1}) \\ &= f_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) f_{t_{k+1}}(x_{k+1} | B(t_j) = x_j, 1 \leq j \leq k-1) \\ &= p_{t_1}(x_1) p_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \cdots p_{t_{k+1}-t_k}(x_{k+1} - x_k). \end{aligned}$$



下面这个例子对应金融里的一个经典问题: 已知股票在时间 t 的价格是 B , 求它在中间时刻 s 的价格分布.

例 7.2.1 (Brown 桥) 对任意 $s < t$, 求 $B(s)|B(t) = B$ 的分布, 其中 B 是任意实数. 事实上, 因为

$$\begin{aligned} f_{s|t}(x|B) &= \frac{p_s(x)p_{t-s}(B-x)}{p_t(B)} = c_1 \exp\left\{-\frac{x^2}{2s} - \frac{(B-x)^2}{2(t-s)}\right\} \\ &= c_2 \exp\left\{-\frac{t(x - Bs/t)^2}{2s(t-s)}\right\}, \end{aligned}$$

所以条件分布也是正态分布. 相应的

$$\mathbb{E}[B(s)|B(t) = B] = Bs/t,$$

$$\mathbb{D}(B(s)|B(t) = B) = s(t-s)/t.$$

方差不依赖于 B , 即如果 $s/t = \alpha \in (0, 1)$, 则

$$B(s)|B(t) \sim N(\alpha B(t), \alpha(1-\alpha)t).$$



Brown 桥在金融里的典型应用场景

◇ 路径依赖问题的分析与模拟

在已知起点和终点的条件下, 研究中间时刻的分布, 是后续随机分析和金融应用的基础.

◇ 统计推断

可用于条件分布的构造与检验, 是概率统计中常用的条件过程模型.



Gauss 过程

定义 7.2.1:

若过程 $\{X(t), t \in T\}$ 对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,

$$(X(t_1), \cdots, X(t_n))$$

的联合分布为 n 维正态分布, 则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为 **Gauss 过程**.

金融里很多模型都是 Gauss 过程, 这部分是为我们后续构造更复杂的股价模型打基础.

- 注.
- ① Gauss 过程的概率性质由均值函数和协方差函数完全确定.
 - ② 显然, Brown 运动是 Gauss 过程.



判定定理

判断一个 Gauss 过程为 Brown 运动的充要条件.

定理 7.2.4:

设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 是轨道连续的 Gauss 过程, $B(0) = 0$ 且

$$\mathbb{E}B(t) = 0, \quad \mathbb{E}[B(s)B(t)] = t \wedge s \quad (\forall s, t > 0), \quad (A)$$

则 $\{B(t), t \geq 0\}$ 是 Brown 运动. 反之亦然.



证. (充分性) 若 B 为 Brown 运动, 则 B 为 Gauss 过程.
 由 Brown 运动的定义可知, 轨道连续且 $\mathbb{E}B(t) = 0$.
 令 $0 < s \leq t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B(t)B(s)] &= \mathbb{E}[(B(t) - B(s) + B(s))B(s)] \\ &= \mathbb{E}[B(t) - B(s)]\mathbb{E}[B(s)] + s = s\end{aligned}$$

所以,

$$\mathbb{E}[B(t)B(s)] = t \wedge s.$$



(必要性) 若 B 是 Gauss 过程且满足 (A) 式, 则对任意 $s, t > 0$,

$$\mathbb{E}[B(t) - B(s)] = \mathbb{E}[B(t)] - \mathbb{E}[B(s)] = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B(t) - B(s)]^2 &= \mathbb{E}B^2(t) + \mathbb{E}B^2(s) - 2\mathbb{E}[B(t)B(s)] \\ &= t + s - 2(t \wedge s) = |t - s|. \end{aligned}$$

可得 B 是平稳增量的, 而对任意 $s_1 < t_1 < s_2 < t_2$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[(B(t_1) - B(s_1))(B(t_2) - B(s_2))] \\ &= \mathbb{E}[B(t_1)B(t_2)] - \mathbb{E}[B(t_1)B(s_2)] \\ &\quad - \mathbb{E}[B(s_1)B(t_2)] + \mathbb{E}[B(s_1)B(s_2)] \\ &= t_1 - t_1 - s_1 + s_1 = 0. \end{aligned}$$

故 B 是独立增量的, 由假设又是连续轨道的, 所以 B 是 BM. \square



由上可以推出 Brown 运动的两大核心尺度性质:

推论 7.2.1

若 $\{B(t), t \geq 0\}$ 是 Brown 运动, $a, \delta > 0$, 则

- ① 平移不变性: $\{B(t+a) - B(a); t \geq 0\}$ 是 Brown 运动;

(金融含义: 股价波动没有时间记忆效应. 不管从哪一天开始观察股价, 未来涨跌的分布规律永远一致, 完美对应弱式有效市场假设)

- ② 自相似性: $\{B(\delta t) / \sqrt{\delta}; t \geq 0\}$ 是 Brown 运动.

(金融含义: 股价日线、小时线、分钟线, 波动形态完全一致! 波动率随时间平方根缩放, 这是金融波动率建模、期限结构、VaR 风险计算的核心依据)

这是构造所有连续时间股价模型的基础模块.



从花粉运动到股价波动: 为什么金融要学 Brown 运动?

轨道性质: 极其粗糙的路径

Brown 运动与鞅

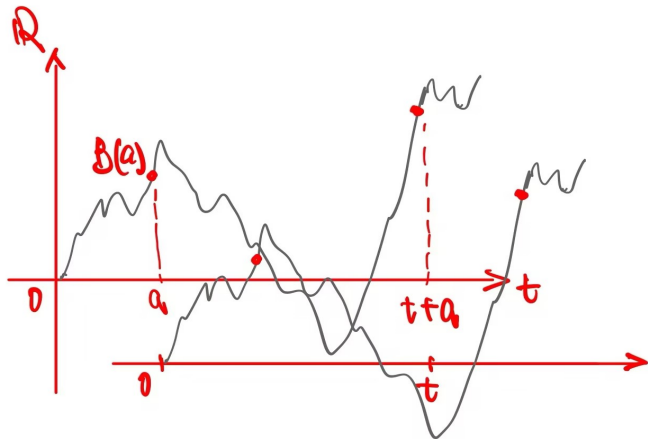
什么是 Brown 运动?

核心性质 (独立增量, 正态性, 路径连续)

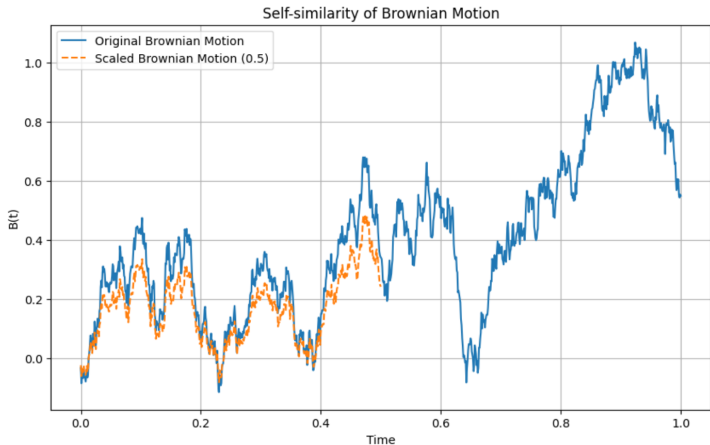
反射原理与首次时间

金融应用: 股价建模与期权定价

Brown 运动的平移不变性图示



Brown 运动的自相似性图示



下面的结果说明 BM 具有时间反演对称性.

定理 7.2.5 (时间反演)

设 $\tilde{B}(t) := \begin{cases} tB(1/t), & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$ 则 $\{\tilde{B}(t), t \geq 0\}$ 是 BM.

证. 易证 $\{\tilde{B}(t), t \geq 0\}$ 是 Gauss 过程, 且 $\forall t, s \geq 0$

$$\mathbb{E}[\tilde{B}(t)] = 0, \quad \mathbb{E}[\tilde{B}(t)\tilde{B}(s)] = t \wedge s.$$

往证: $\lim_{t \downarrow 0} \tilde{B}(t) = 0$ a.s..



事实上,

$$\tilde{F} := \{\lim_{t \downarrow 0} \tilde{B}(t) = 0\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{t \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/n)} \{|\tilde{B}(t)| < 1/m\},$$

$$F := \{\lim_{t \downarrow 0} B(t) = 0\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{t \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/n)} \{|B(t)| < 1/m\},$$

因为 $\{\tilde{B}(t), t \geq 0\}$ 与 $\{B(t), t \geq 0\}$ 有相同的有限维分布, 所以

$$\mathbb{P}(\tilde{F}) = \mathbb{P}(F) = 1.$$



比如已知未来价格, 反推过去路径的分布, 用于路径依赖期权的回溯检验.

补充例. 设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 是标准 Brown 运动, 利用 BM 的时间反演对称性, 求

$$\mathbb{P}(B(0.5) \leq 1 | B(1) = 1, B(2) = 2).$$

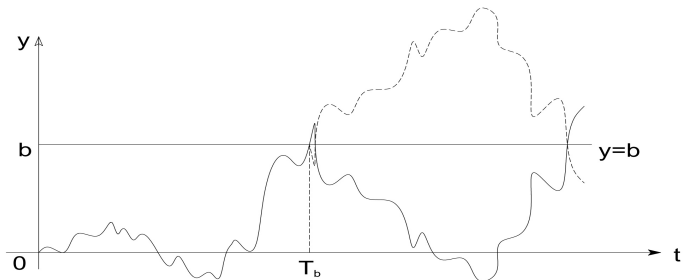


定理 7.3.1: (反射原理)

固定实数 b , 令

$$\hat{B}(t) := \begin{cases} B(t), & t < T_b, \\ 2b - B(t), & t \geq T_b, \end{cases}$$

则 $\{\hat{B}(t), t \geq 0\}$ 也是 Brown 运动.



数学上严格成立的对称关系: 每条"触碰 b 后最终低于 b "的路径, 都唯一对应一条"触碰 b 后最终高于 b "的镜像路径.

直观解释: 在障碍期权定价中,

- ◇ 障碍价 b : 如期权合约中的"敲出价";
- ◇ "曾经触及 b ": 期权的触发条件;
- ◇ 镜像原理: 将"历史最高价 $\geq b$ "的复杂路径, 转化为"期末价格 $\geq b$ "的简单概率问题.



最大值变量, 亦称为最大游程

$$M_t := \sup\{B(u), u \leq t\}.$$

注. 对任意 $b, y, t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(M_t \geq b, B(t) \leq b - y) = \mathbb{P}(B(t) \geq b + y).$$

事实上, 对任意 $b, y, t \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(M_t \geq b, B(t) \leq b - y) \\ &= \mathbb{P}(\hat{M}_t \geq b, \hat{B}(t) \geq b + y) = \mathbb{P}(\hat{B}(t) \geq b + y) \\ &= \mathbb{P}(B(t) \geq b + y). \end{aligned}$$



推论 7.3.1:

(2) (最大值变量的分布) M_t 与 $|B(t)|$ 同分布:

$$\mathbb{P}(M_t \geq b) = 2\mathbb{P}(B(t) \geq b), \quad \forall b \geq 0;$$

(3) 对任意 $b \neq 0$,

$$f_{T_b}(t) = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{b^2}{2t}\right\}, \quad t > 0.$$

注. 这是一个厚尾分布, 且 $\mathbb{E}T_b = \infty$. 直观地说, 虽然几乎必然会发生触达, 但平均需要的时间无穷大.



证. (2) $\forall b > 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(M_t \geq b) \\ &= \mathbb{P}(M_t \geq b, B(t) > b) + \mathbb{P}(M_t \geq b, B(t) \leq b) \\ &= 2\mathbb{P}(B(t) \geq b); \end{aligned}$$



证. (3) 对任意 $b > 0, t > 0$,

$$\mathbb{P}(T_b \leq t) = \mathbb{P}(M_t \geq b) = 2(1 - \Phi(b/\sqrt{t})).$$

$$\therefore f_{T_b}(t) = 2\phi(b/\sqrt{t}) \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{t^3}} = \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{b^2}{2t}\right\}.$$

从而

$$\mathbb{E}T_b = \int_0^\infty \frac{b}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{b^2}{2t}\right\} dt = \infty.$$

□



注意到, 标准 Brown 运动 $B(t)$ 可能取负值, 但股票价格不能为负, 故引入几何 Brown 运动.

例 7.4.2 (对数/几何 Brown 运动, Geometric Brownian Motion)

设 $W(t) := e^{B(t)}$, $t \geq 0$. 注意到, 由 $B(t) \sim N(0, t)$, 可知相应矩母函数

$$s \mapsto \mathbb{E}[e^{sB(t)}] = e^{\frac{ts^2}{2}}.$$

从而

$$\mathbb{E}[W(t)] = \mathbb{E}[e^{B(t)}] = e^{\frac{t}{2}},$$

$$\mathbb{D}(W(t)) = \mathbb{E}[e^{2B(t)}] - e^t = e^{2t} - e^t.$$

有时对数 Brown 运动可视为相对变化为 i.i.d. 情形的模型. #



几何 Brown 运动: 金融市场的基石.

$$S(t) = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B(t) \right\}$$

◇ 参数含义:

- ① S_0 : 初始股价;
- ② μ : 漂移率(期望收益率);
- ③ σ : 波动率(风险).

◇ 性质: $S(t)$ 永远大于 0, 且对数收益率 $\ln S(t)$ 服从正态分布.

◇ 应用: Black-Scholes 期权定价模型的核心假设.



在金融中, 有时我们需要描述“平均利率”或“累积风险”. 引入如下利率模型: **积分 Brown 运动**.

例 7.4.3 令 $S(t) := \int_0^t B(u)du$, 则称 $\{S(t), t \geq 0\}$ 为积分 Brown 运动或 Brown 运动的积分.

直观地说, t 时刻商品的价格为 $S(t)$, 其变化率是 $B(t)$:

$$\frac{d}{dt}S(t) = B(t).$$

- ① $S(t)$ 依然是 Gauss 过程;
- ② 性质: 虽然 $B(t)$ 不可导, 但 $S(t)$ 是可导的(因为积分平滑了噪声);
- ③ 应用: 在 Vasicek 或 Hull-White 利率模型中, 会用到类似的结构来描述均值回归的利率过程.



例 7.4.3 (续) 由 Fubini 定理, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S(t)] &= \int_0^t \mathbb{E}[B(u)] du = 0, \\ D(S(t)) &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^t B(v)B(u) du dv\right] \\ &= \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}[B(v)B(u)] du dv \\ &= \int_0^t \int_0^t u \wedge v du dv = 2 \int_0^t du \int_0^u v dv \\ &= \int_0^t u^2 du = \frac{t^3}{3}.\end{aligned}$$

#



下面关注 Brown 运动的轨道性质.

引理 7.5.1

设 $D = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ 是区间 $[0, t]$ 的有限划分,

$$V_2^D = \sum_{l=1}^n |B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^2: \text{称为 } B \text{ 在分划 } D \text{ 上的二次变差,}$$

那么

$$\mathbb{E} V_2^D = t,$$

$$\mathbb{E} \left\{ \left(V_2^D - \mathbb{E} V_2^D \right)^2 \right\} = 2 \sum_{l=1}^n (t_l - t_{l-1})^2.$$



定理 7.5.1

设 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ 是一维标准 Brown 运动, D 是区间 $[0, t]$ 上的有限分划, 且

$$m(D) = \max_i |t_i - t_{i-1}|,$$

则对任何 $t > 0$,

$$\lim_{m(D) \rightarrow 0} V_2^D = t \quad \text{with probability 1.}$$

- ◇ **含义:** 虽然路径是连续的, 但它的总变差(长度)是无穷大!
- ◇ **金融启示:** 股价路径极其“曲折”, 无法用传统的微积分(牛顿-莱布尼茨公式)直接处理.
- ◇ **推论:** $dB(t) \cdot dB(t) = dt$. 这是 Itô 积分的基础.



证*. 基于前面的引理, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left| \sum_l |B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^2 - t \right|^2 &= \mathbb{E} \left| V_2^D - \mathbb{E} \left(V_2^D \right) \right|^2 \\ &= 2 \sum_{l=1}^n (t_l - t_{l-1})^2 \\ &\leq 2m(D) \sum_{l=1}^n (t_l - t_{l-1}) \\ &= 2tm(D),\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{m(D) \rightarrow 0} \mathbb{E} \left| \sum_l |B_{t_l} - B_{t_{l-1}}|^2 - t \right|^2 = 0.$$



连续鞅的定义

设 (\mathcal{G}_t) 是一个(信息)流: $\forall t \geq 0$, \mathcal{G}_t 是一个事件域且

$$\mathcal{G}_s \subset \mathcal{G}_t, 0 \leq s < t.$$

定义 7.6.1

设 $\{X_t\}$ 是一个适应于流 (\mathcal{G}_t) 的随机过程, 即 $\forall t \geq 0$, X_t 关于 \mathcal{G}_t 可测. 如果

- (1) 对任何 t , 有 $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$;
- (2) 对任何 $s < t$ 有

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{G}_s] = X_s,$$

则称 $\{X_t\}$ 是鞅. 上鞅下鞅的定义类似.
一个连续随机过程如果是鞅, 则称为连续鞅.



由 Brown 运动诱导的鞅

例 2. 设 $\{B_t\}$ 是关于流 (\mathcal{G}_t) 的标准 Brown 运动, 那么

- (1) $\{B_t\}$ 是个鞅.
- (2) $\{B_t^2 - t\}$ 是鞅.

事实上, (1) 因为 $B_t - B_s$ 与 \mathcal{G}_s 独立, 所以

$$\mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] = 0.$$

(2) $(B_t - B_s)^2$ 与 \mathcal{G}_s 独立, 所以

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s,$$

或者, 根据条件期望性质

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{G}_s] &= \mathbb{E}[B_t^2 - 2(B_t - B_s)B_s - B_s^2 | \mathcal{G}_s] \\ &= \mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2 | \mathcal{G}_s] = t - s.\end{aligned}$$



由 Brown 运动诱导的鞅

例 2. 设 $\{B_t\}$ 是关于流 (\mathcal{G}_t) 的标准 Brown 运动, 那么

- (1) $\{B_t\}$ 是个鞅.
- (2) $\{B_t^2 - t\}$ 是鞅.

事实上, (1) 因为 $B_t - B_s$ 与 \mathcal{G}_s 独立, 所以

$$\mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] = 0.$$

(2) $(B_t - B_s)^2$ 与 \mathcal{G}_s 独立, 所以

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s,$$

或者, 根据条件期望性质

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{G}_s] &= \mathbb{E}[B_t^2 - 2(B_t - B_s)B_s - B_s^2 | \mathcal{G}_s] \\ &= \mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2 | \mathcal{G}_s] = t - s.\end{aligned}$$



由 Brown 运动诱导的鞅

例 2. 设 $\{B_t\}$ 是关于流 (\mathcal{G}_t) 的标准 Brown 运动, 那么

- (1) $\{B_t\}$ 是个鞅.
- (2) $\{B_t^2 - t\}$ 是鞅.

事实上, (1) 因为 $B_t - B_s$ 与 \mathcal{G}_s 独立, 所以

$$\mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] = 0.$$

(2) $(B_t - B_s)^2$ 与 \mathcal{G}_s 独立, 所以

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s,$$

或者, 根据条件期望性质

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{G}_s] &= \mathbb{E}[B_t^2 - 2(B_t - B_s)B_s - B_s^2 | \mathcal{G}_s] \\ &= \mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2 | \mathcal{G}_s] = t - s.\end{aligned}$$



给定 $x \in \mathbb{R}$, $\{e^{xB_t - x^2 t/2} : t \geq 0\}$ 是鞅, 称之为指数鞅.

事实上, 增量的函数 $e^{x(B_t - B_s)}$ 与 \mathcal{G}_s 独立且它的期望为 $e^{x^2(t-s)/2}$, 所以

$$\mathbb{E}[e^{x(B_t - B_s)} | \mathcal{G}_s] = e^{x^2(t-s)/2},$$

或者

$$\mathbb{E}[e^{xB_t - x^2 t/2} | \mathcal{G}_s] = e^{xB_s - x^2 s/2}.$$

注. 说指数鞅是最重要的鞅的原因是它如同一个母鞅:

$$\begin{aligned} e^{xB_t - x^2 t/2} &= 1 + (xB_t - x^2 t/2) + \frac{1}{2}(xB_t - x^2 t/2)^2 + \dots \\ &= 1 + xB_t + \frac{1}{2}x^2(B_t^2 - t) + \frac{1}{3!}x^3(B_t^3 - 3tB_t) + \dots, \end{aligned}$$

从而看出 $\{B_t\}$, $\{B_t^2 - t\}$ 还有 $\{B_t^3 - 3tB_t\}$ 都是鞅.



给定 $x \in \mathbb{R}$, $\{e^{xB_t - x^2 t/2} : t \geq 0\}$ 是鞅, 称之为指数鞅.

事实上, 增量的函数 $e^{x(B_t - B_s)}$ 与 \mathcal{G}_s 独立且它的期望为 $e^{x^2(t-s)/2}$, 所以

$$\mathbb{E}[e^{x(B_t - B_s)} | \mathcal{G}_s] = e^{x^2(t-s)/2},$$

或者

$$\mathbb{E}[e^{xB_t - x^2 t/2} | \mathcal{G}_s] = e^{xB_s - x^2 s/2}.$$

注. 说指数鞅是最重要的鞅的原因是它如同一个母鞅:

$$\begin{aligned} e^{xB_t - x^2 t/2} &= 1 + (xB_t - x^2 t/2) + \frac{1}{2}(xB_t - x^2 t/2)^2 + \dots \\ &= 1 + xB_t + \frac{1}{2}x^2(B_t^2 - t) + \frac{1}{3!}x^3(B_t^3 - 3tB_t) + \dots, \end{aligned}$$

从而看出 $\{B_t\}$, $\{B_t^2 - t\}$ 还有 $\{B_t^3 - 3tB_t\}$ 都是鞅.



给定 $x \in \mathbb{R}$, $\{e^{xB_t - x^2 t/2} : t \geq 0\}$ 是鞅, 称之为指数鞅.

事实上, 增量的函数 $e^{x(B_t - B_s)}$ 与 \mathcal{G}_s 独立且它的期望为 $e^{x^2(t-s)/2}$, 所以

$$\mathbb{E}[e^{x(B_t - B_s)} | \mathcal{G}_s] = e^{x^2(t-s)/2},$$

或者

$$\mathbb{E}[e^{xB_t - x^2 t/2} | \mathcal{G}_s] = e^{xB_s - x^2 s/2}.$$

注. 说指数鞅是最重要的鞅的原因是它如同一个母鞅:

$$\begin{aligned} e^{xB_t - x^2 t/2} &= 1 + (xB_t - x^2 t/2) + \frac{1}{2}(xB_t - x^2 t/2)^2 + \dots \\ &= 1 + xB_t + \frac{1}{2}x^2(B_t^2 - t) + \frac{1}{3!}x^3(B_t^3 - 3tB_t) + \dots, \end{aligned}$$

从而看出 $\{B_t\}$, $\{B_t^2 - t\}$ 还有 $\{B_t^3 - 3tB_t\}$ 都是鞅.



称随机时间 $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ 为停时, 如果对任意 $t \geq 0$, 有

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{G}_t.$$

例 1. 考虑连续过程 $\{X_t\}$. 对任意集合 $A \subset \mathbb{R}$, 定义首中时

$$\tau_A(\omega) = \inf\{t > 0 : X_t \in A\},$$

则当 A 是开集或闭集时, τ_A 是停时.

事实上, 只要看时间 t 之前的轨道即可知道是不是已经到达 A , 这正是停时的直观意义. $\#$



称随机时间 $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ 为停时, 如果对任意 $t \geq 0$, 有

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{G}_t.$$

例 1. 考虑连续过程 $\{X_t\}$. 对任意集合 $A \subset \mathbb{R}$, 定义首中时

$$\tau_A(\omega) = \inf\{t > 0 : X_t \in A\},$$

则当 A 是开集或闭集时, τ_A 是停时.

事实上, 只要看时间 t 之前的轨道即可知道是不是已经到达 A , 这正是停时的直观意义. $\#$



定理 7.6.1 (Doob 停止定理, Optional Stopping Theorem)

如果 $\{X_t\}$ 是连续鞅, τ 是停时, 那么停止过程 $\{X_{\tau \wedge t}\}$ 也是鞅.

意义: 即使你在赌博中设定一个“见好就收”的停止策略, 你依然无法战胜一个公平的赌场.



例 7.6.1 (障碍问题) 设 $a < 0 < b$,

T_a, T_b 分别是原点出发的 Brown 运动首次碰到 a, b 的时间.

(1) 用鞅方法求: $\mathbb{P}(T_a < T_b)$.

由鞅的期望不变性, 对任何 $t > 0$,

$$\mathbb{E}B_{T \wedge t} = 0.$$

对任何 t 都有 $a \leq B_{T \wedge t} \leq b$, 所以当 $t \rightarrow \infty$ 时, 由 DCT 可得 $\mathbb{E}B_T = 0$. 而

$$B_T = a1_{\{T_a < T_b\}} + b1_{\{T_b < T_a\}},$$

因此 $a\mathbb{P}(T_a < T_b) + b\mathbb{P}(T_b < T_a) = 0$, 即

$$\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{b}{b-a}.$$



例 7.6.1 (障碍问题) 设 $a < 0 < b$,

T_a, T_b 分别是原点出发的 Brown 运动首次碰到 a, b 的时间.

(1) 用鞅方法求: $\mathbb{P}(T_a < T_b)$.

由鞅的期望不变性, 对任何 $t > 0$,

$$\mathbb{E}B_{T \wedge t} = 0.$$

对任何 t 都有 $a \leq B_{T \wedge t} \leq b$, 所以当 $t \rightarrow \infty$ 时, 由 DCT 可得 $\mathbb{E}B_T = 0$. 而

$$B_T = a1_{\{T_a < T_b\}} + b1_{\{T_b < T_a\}},$$

因此 $a\mathbb{P}(T_a < T_b) + b\mathbb{P}(T_b < T_a) = 0$, 即

$$\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{b}{b-a}.$$



(2) 求 $\mathbb{E}[T]$, 其中 $T = T_a \wedge T_b$.

需要用鞅 $\{B_t^2 - t\}$, 由期望不变性,

$$\mathbb{E}[B_{T \wedge t}^2] = \mathbb{E}[T \wedge t].$$

让 $t \rightarrow \infty$, 得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[B_T^2] = a^2\mathbb{P}(T_a < T_b) + b^2\mathbb{P}(T_a > T_b) \\ &= -ab.\end{aligned}$$

#



- (2) 求 $\mathbb{E}[T]$, 其中 $T = T_a \wedge T_b$.
需要用鞅 $\{B_t^2 - t\}$, 由期望不变性,

$$\mathbb{E}[B_{T \wedge t}^2] = \mathbb{E}[T \wedge t].$$

让 $t \rightarrow \infty$, 得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[B_T^2] = a^2\mathbb{P}(T_a < T_b) + b^2\mathbb{P}(T_a > T_b) \\ &= -ab.\end{aligned}$$

#

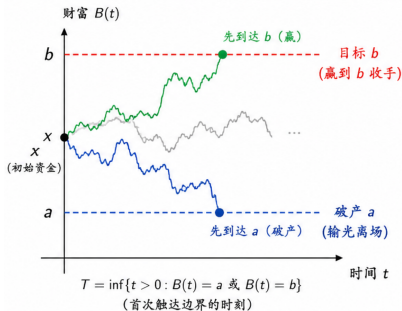


赌徒破产问题 (Gambler's Ruin)

场景: 一个赌徒带着本金 x 进入赌场. 赌场游戏是公平的(即他的财富过程是 Brown 运动). 他设定两个目标: 赢到 b 就收手, 或者输光到 a 就离场 ($a < x < b$).

结果: 赌徒最终破产 (触达 a) 的概率为

$$\mathbb{P}(\text{Ruin}) = \frac{b - x}{b - a}.$$



金融启示: 这就是期权定价中边界条件处理的雏形.



例 7.6.1 (续) 求 T 的 Laplace 变换.

首先, 用指数鞅 $\{e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2}, t \geq 0\}$.

由期望不变性和控制收敛定理, 得

$$\mathbb{E} [\exp(\lambda B_T - \lambda^2 T/2)] = 1,$$

因此

$$e^{\lambda a} \mathbb{E} [e^{-\lambda^2 T/2}; T_a < T_b] + e^{\lambda b} \mathbb{E} [e^{-\lambda^2 T/2}; T_a > T_b] = 1.$$

▷ 这还不足以算出 $\mathbb{E} [e^{-\lambda^2 T/2}]$.



例 7.6.1 (续) 求 T 的 Laplace 变换.

首先, 用指数鞅 $\{e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2}, t \geq 0\}$.

由期望不变性和控制收敛定理, 得

$$\mathbb{E} [\exp(\lambda B_T - \lambda^2 T/2)] = 1,$$

因此

$$e^{\lambda a} \mathbb{E} [e^{-\lambda^2 T/2}; T_a < T_b] + e^{\lambda b} \mathbb{E} [e^{-\lambda^2 T/2}; T_a > T_b] = 1.$$

▷ 这还不足以算出 $\mathbb{E} [e^{-\lambda^2 T/2}]$.



其次, 再考虑指数鞅 $\{e^{-\lambda B_t - \lambda^2 t/2}, t \geq 0\}$, 类似可得

$$\mathbb{E}(\exp\{-\lambda B_T - \lambda^2 T/2\}) = 1$$

和

$$e^{-\lambda a} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda^2 T/2}; T_a < T_b\right] + e^{-\lambda b} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda^2 T/2}; T_a > T_b\right] = 1.$$

从上面两个方程推出

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda^2 T/2}\right] = \frac{\sinh(\lambda a) - \sinh(\lambda b)}{\sinh(\lambda(a-b))},$$

其中 $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$. 由此立刻得到 T 的 Laplace 变换. #



♡ ~ The End ~ ♡

